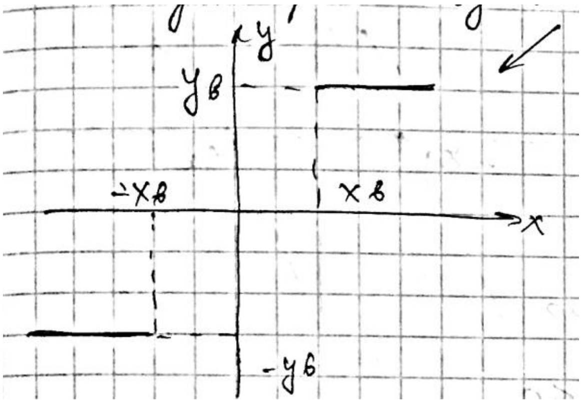
Билет №3

1) Основные специфические свойства НЛС. Неограниченный рост сигнала в ограниченное время. Зависимость поведения от начальных условий.

1. Основные свойства НЛС:

- Неограниченный рост сигнала за ограниченное время *t*.



Неограниченный рост, например.

- Особые точки системы.

  Их может быть несколько

- Периодические незатухающие колебания в НС называются предельным циклом.

  Они могут быть несинусоидальными и с другой стороны они могут быть на такой частоте, на которой вход. Но не обязательно.

- Неединственность динамических характеристик.
- Скачок амплитуды в резонансе

  Два этих пункта можно объединить.

- Синхронизация.

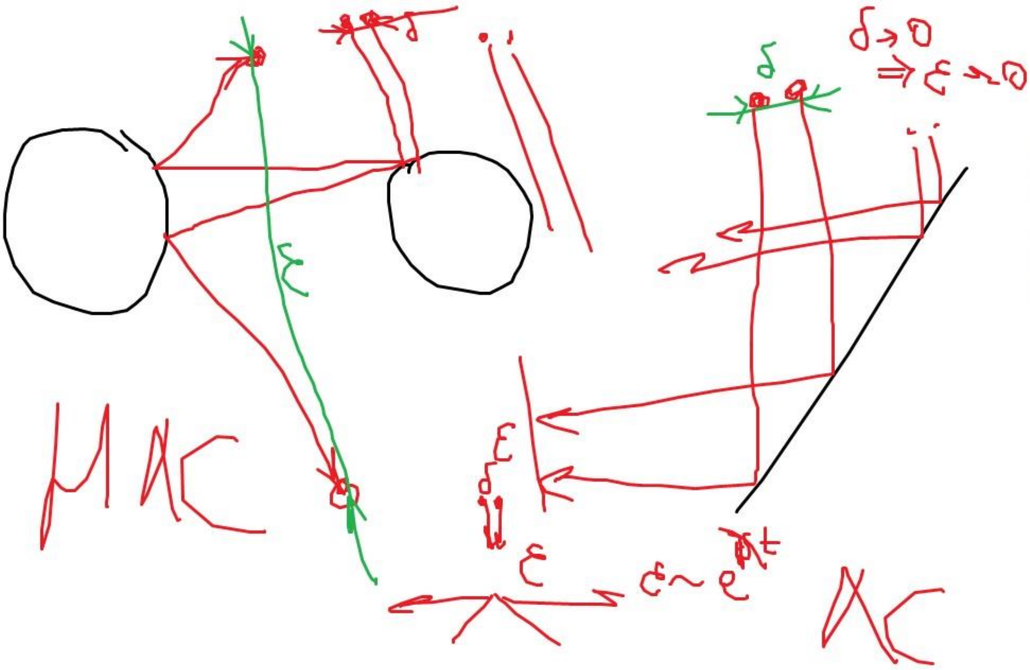
  Японское видео с метрономами (особенность нелинейных маятников)

- Структурная нестабильность (бифуркация) – перестройка фазового портрета.

  Метод описания структурной нестабильности.

- Хаотическая динамика.

  Если у нас есть система и мы с ней что-то сделали и оставили в каких-то начальных условиях она будет как-то двигаться в фазовом пространстве, если система не хаотическая и мы сделали все тоже, что и в прошлый раз, она будет двигаться практически так же, как и раньше, а хаотическая будет двигаться произвольно.



Хаотическая динамика – динамика хаотических систем.

В 5 вопросе еще есть хаотическая динамика.

- Хаос (то же самое, что и хаотическая динамика)

2. Неограниченный рост сигнала в ограниченное время:

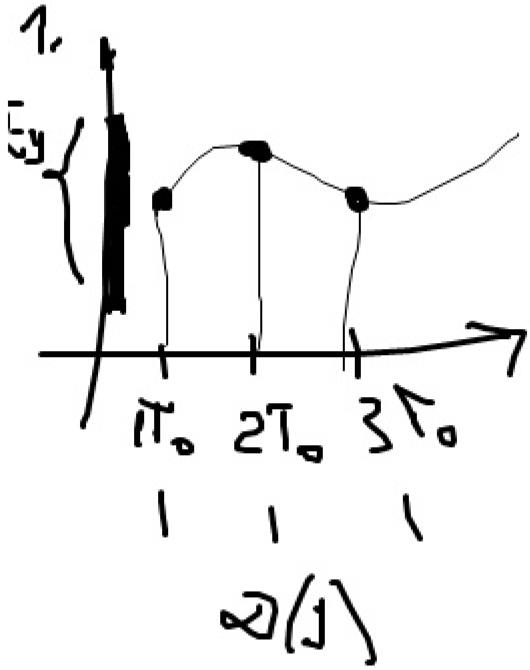
$$\dot{x} = x^2; \quad x(0) = x_0; \quad t = \frac{1}{x_0}$$

3. Зависимость поведения от начальных условий:

Устойчивость НС может зависеть от входных сигналов и (или) начальных условий. Одна и та же НС при одном входном воздействии устойчива, а при другом нет.

2 билет

Дискретные по времени функции и разностные уравнения.



Запишем разностные уравнения (правая и левая разности соответственно):

2.

$$x(n+1) - x(n) = F(x) = \Delta x$$

$$x(n) - x(n-1) = F(x) = \nabla x$$

(дельта и набла)

Пример преобразования экспоненциальной функции из непрерывной в дискретную.

Дана какая-то непрерывная экспоненциальная функция:

$$y(t) = e^{\alpha t}$$

Фактически наш переход от непрерывного времени к дискретному $t \to nT_0$ отражается следующим образом:

$$y(t) \to y(n) = e^{\alpha \cdot n T_0} = e^{\alpha T_0 \cdot n}$$

y(n) – дискретная функция.

Представление явной функции в виде разностного уравнения:

См. пункт 2, но лучше взять из учебника.

Левые и правые производные:

Определение производной:

4.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если функция определено только в дискретный момент времени T0:

$$f'(nT_0) \Rightarrow f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{T_0} =$$

$$= \nabla$$

$$(n) - (n-1) = \Delta f$$

$$\underline{(n+1)T_0 - nT_0 = T_0}$$

Два равно = это имеется ввиду что ИгорАж сказал либо так либо так, хз.

Левые и правые разности заменяют производные.

Пример дискретизации уравнения первого порядка:

См. в учебнике или в лекциях.

$$\frac{dy}{dt} = a x$$

$$\Delta y = a x_n$$

$$y(n+1) = a x_n + y(n)$$

Дифференциальное и дискретное уравнения.

Решетчатые функции: см. книгу.

приближенно рассматривать как дискретный сигнал $x_T(kT_0)$, показанный на рис. 3.1.2. В этом случае ключ действует как идеальный квантователь, и величины $x_T(kT_0)$ равны мгновенным значениям амплитуд.

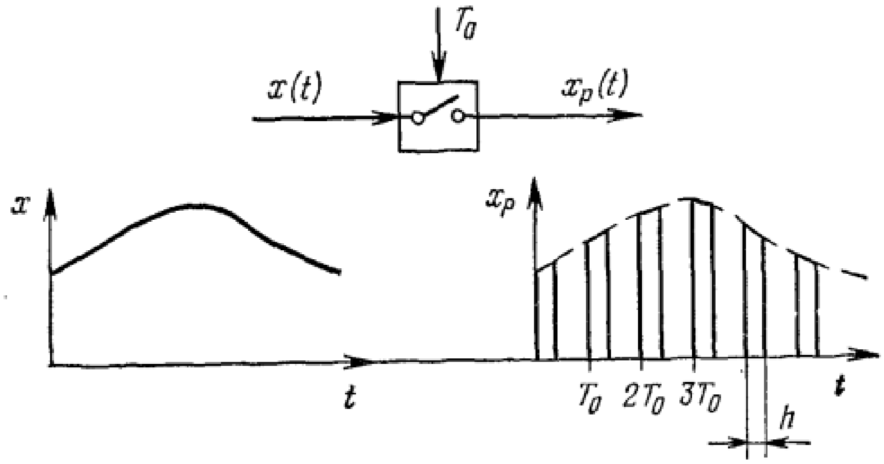


Рис. 3.1.1. Формирование амплитудно-модулированного дискретного сигнала путем пропускания непрерывного сигнала через ключ с периодом замыкания T_0 и продолжительностью замыкания h.

Модулированная по амплитуде дискретная функция $x_T(t)$, получаемая путем квантования по времени непрерывного сигнала $x(t)$ с постоянным тактом T_0, математически описывается выражением

$$\left.\begin{aligned} x_T(t) &= x(kT_0) \quad \text{при} \quad t = kT_0, \\ x_T(t) &= 0 \qquad\quad \text{при} \quad kT_0 < t < (k+1)T_0; \end{aligned}\right\} k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad (3.1\text{-}1)$$

Формирование дискретных по времени функций различных типов иллюстрируется приведенными ниже примерами.

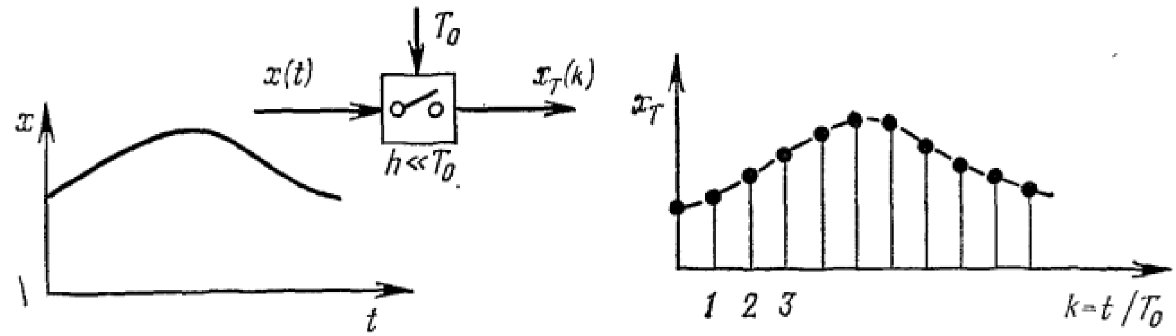


Рис. 3.1.2. Дискретный сигнал $x_T(k)$, получаемый на выходе квантователя ($h \ll T_0$).

Пример 3.1.1.

а) В результате квантования непрерывная функция времени

$$x(t) = e^{-\alpha t}$$

преобразуется в дискретную по времени функцию ($t = kT_0$)

$$x(kT_0) = e^{-\alpha k T_0}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, эти функции связаны явным соотношением

$$x_T(t) = x(kT_0).$$

б) Операция интегрирования

$$x(t) = \frac{1}{T}\int_0^t w(t)\,dt$$

выполняется численно путем аппроксимации $w(t)$ ступенчатой функцией. При этом интеграл заменяется суммой

$$x(kT_0) = \frac{1}{T}\sum_{\nu=0}^{k-1} T_0 w(\nu T_0).$$

Поскольку $x(kT_0)$ зависит от второй дискретной функции, т. е.

$$x_T(t) = x(kT_0) = f[w(\nu T_0),\ kT_0],$$

результат записывается в неявной форме.

В следующем примере показывается, как неявную функцию можно представить в виде разностного уравнения.

Пример 3.1.2. Из выражения, полученного в примере 3.1.1, б, следует, что

$$x((k+1)T_0) = \frac{1}{T}\sum_{\nu=0}^{k} T_0 w(\nu T_0).$$

После вычитания имеем

$$x((k+1)T_0) - x(kT_0) = \frac{T_0}{T} w(kT_0)$$

или

$$x(k+1) + a_1 x(k) = b_1 w(k).$$

Уменьшив k на 1, приходим к окончательному соотношению

$$x(k) + a_1 x(k-1) = b_1 w(k-1),$$

где $a_1 = -1$; $b_1 = T_0/T$.

Это — линейное разностное уравнение первого порядка.

Для получения разностного уравнения достаточно любую дискретную функцию, зависящую от другой дискретной функции, представить в рекуррентной форме. Линейное разностное уравнение порядка m имеет вид

$$x(k) + a_1 x(k-1) + \ldots + a_m x(k-m) = \\ = b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \ldots + b_m w(k-m). \qquad (3.1\text{-}2)$$

Здесь аргумент kT_0 заменен индексом k. Величину выходного сигнала при любом k можно вычислить с помощью рекуррентной формулы

$$x(k) = -a_1 x(k-1) - \ldots - a_m x(k-m) + \\ + b_0 w(k) + b_1 w(k-1) + \ldots + b_m w(k-m), \qquad (3.1\text{-}3)$$

если известны текущее значение входа $w(k)$ и m предшествующих значений $w(k-1), \ldots, w(k-m)$, а также соответствующие значения выхода $x(k-1), \ldots, x(k-m)$.

Другой способ построения разностных уравнений состоит в дискретизации дифференциальных уравнений. При этом дифференциальное уравнение первого порядка аппроксимируется разностным уравнением первого порядка, дифференциальное уравнение второго порядка — разностным уравнением второго порядка и т. д. При замене дифференциалов левыми разностями справедливы следующие соотношения:

Непрерывная функция	Дискретная функция
первая производная	разность первого порядка
$\frac{dx(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$	$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$
вторая производная	разность второго порядка
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t-\Delta t)}{dt}}{\Delta t}$	$\Delta^2 x(k) = \Delta x(k) - \Delta x(k-1) = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$
$\vdots$	$\vdots$

В следующем примере показано, как осуществляется дискретизация дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 3.1.3. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$T\frac{dx(t)}{dt} = w(t).$$

Заменяя дифференциал левой разностью, полученной при такте квантования T_0, имеем выражение

$$x(k) - x(k-1) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Если для дискретизации применяется правая разность

$$\Delta x'(k) = x(k+1) - x(k),$$

то получается то же уравнение, что и в примере 3.1.2:

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T} w(k).$$

Описанные способы аппроксимации дают удовлетворительные результаты только в тех случаях, когда такт квантования T_0 мал по сравнению с постоянной времени T.

Выражение (3.1-2) является наиболее распространенной формой записи разностных уравнений. Если использовать разности высших порядков вплоть до m-го, разностное уравнение можно представить в виде, аналогичном дифференциальному уравнению:

$$\alpha_m\Delta^m x(k)+\alpha_{m-1}\Delta^{m-1}x(k)+\ldots+\alpha_1\Delta x(k)+x(k)=$$
$$=\beta_m\Delta^m w(k)+\beta_{m-1}\Delta^{m-1}w(k)+\ldots+\beta_1\Delta w(k)+\beta_0 w(k). \quad (3.1\text{-}4)$$

Впоследствии будет описан еще один метод получения разностных уравнений, справедливый и при больших значениях такта квантования T_0.

Разностные уравнения. В качестве аналогов дифференциальных уравнений можно рассматривать *разностные уравнения* (*уравнения в конечных разностях*). При использовании прямых разностей неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид

$$b_0\Delta^m y[n]+b_1\Delta^{m-1}y[n]+\ \ldots\ +b_m y[n]=f[n], \qquad (15.14)$$

где $f[n]$ — заданная, а $y[n]$ — искомая решетчатые функции. При $f[n]\equiv 0$ уравнение (15.14) становится однородным разностным уравнением, решением которого будет $y[n]$.

При использовании (15.8) разностное уравнение (15.14) можно записать в другом виде:

$$a_0 y[n+m]+a_1 y[n+m-1]+\ldots+a_m y[n]=f[n]. \qquad (15.15)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются из зависимости

$$a_k=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}b_\nu C_{m-\nu}^{k-\nu}, \qquad (15.16)$$

где биномиальные коэффициенты

$$C_{m-\nu}^{k-\nu} = \frac{(m-\nu)!}{(k-\nu)!\,(m-k)!}. \tag{15.17}$$

При использовании обратных разностей уравнение в конечных разностях будет

$$b_0\nabla^m y\,[n] + b_1\nabla^{m-1}\,y\,[n] + \ldots + b_m y\,[n] = f\,[n]. \tag{15.18}$$

С учетом формулы (15.9) последнее выражение приобретает вид

$$a_0 y\,[n] + a_1 y\,[n-1] + \ldots + a_m y\,[n-m] = f\,[n]. \tag{15.19}$$

Коэффициенты последнего уравнения определяются выражениями

$$a_{m-k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{m-k} b_\nu C_{m-\nu}^{k-\nu}, \tag{15.20}$$

$$C_{m-\nu}^{k-\nu} = \frac{(m-\nu)!}{(k-\nu)!\,(m-k)!}. \tag{15.21}$$

Разностные уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять значения $y\,[n+m]$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ для заданных начальных значений $y\,[0]$, $y\,[1]$, $\ldots$, $y\,[m-1]$ и уравнения вида (15.15) или значения $y\,[n]$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ для заданных начальных значений $y\,[n-m]$, $y\,[n-m+1]$, $\ldots$, $y\,[n-1]$ и уравнения вида (15.19). Такие вычисления легко машинизируются, а также не представляют никаких принципиальных трудностей и при ручном счете (кроме, конечно, затрат времени) даже в случае, когда коэффициенты разностных уравнений a_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) с течением времени изменяются. Это отличает разностные уравнения от их непрерывных аналогов — дифференциальных уравнений.

Общее решение однородного разностного уравнения при некратных корнях характеристического уравнения может быть записано следующим образом:

$$y\,[n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \ldots + C_m z_m^n, \tag{15.22}$$

где z $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0, \tag{15.23}$$

а C_i — произвольные постоянные.

Из (15.22), в частности, вытекает условие того, чтобы свободное движение системы, описываемой разностным уравнением (15.15), было бы затухающим (условие устойчивости):

$$|z_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.24}$$

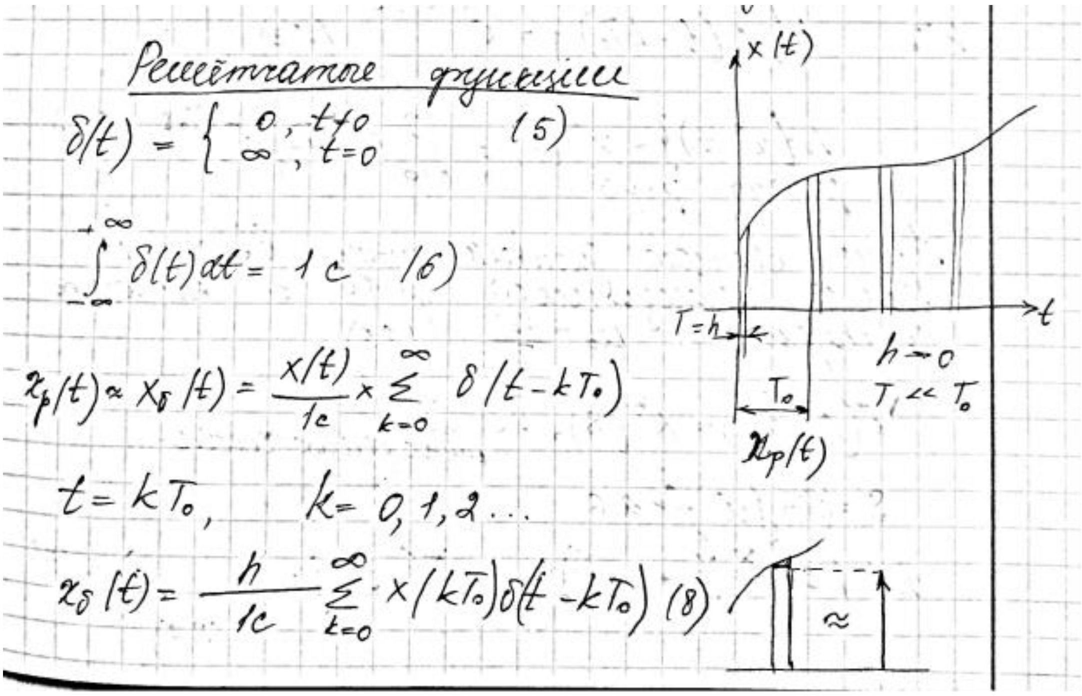
Для получения возможности исследования решений разностных уравнений в общем виде широко используются дискретное преобразование Лапласа, z-преобразование, w-преобразование, а также частотные методы, которые будут изложены ниже.

Решетчатая функция времени x[nT], или в сокращенной записи x[n] - это математическая функция, значения которой определены в дискретные равноотстоящие друг от друга моменты времени t = nT, где n- целое положительное число 0, 1, 2 ..., а T - период дискретности. То есть решетчатая функция представляет собой числовую последовательность:

$$x[0], x[1T], x[2T], x[3T], \dots , x[kT], \dots .$$

Если период дискретности T задан, то решетчатая функция однозначно формируется из исходной непрерывной.

Обратная задача - формирование непрерывной функции из решетчатой - не может быть решена однозначно без дополнительных сведений о поведении функции в интервале между точками t = nT, так как функции, заданной в дискретные моменты времени, может соответствовать бесконечное множество непрерывных функций.



h настолько маленькая величина, что мы можем использовать вместо нее δ функцию.

Интеграл от дельта функций равен единице, а дискретная функция представляет собой произведение дельта функции на какое-то число.

Если $h = 1с$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\delta(t-kT_0) \qquad (9)$$

Ур-ние (9) справедливо при $h \ll T_0$ а при условии реализуемой лин. с-мы, равенст

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Преобразование Лапласа. Применение к анализу дискретн. ф-ций времени

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \qquad (2.1)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1 \qquad (2.2)$$

kT_0 $$L\{\delta(t-kT_0)\} = e^{-kT_0 s} \qquad (2.3)$$

$$L\{x^*(t)\} = x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)e^{-kT_0 s} \qquad (2.4)$$

решетч. ф-ция

Пр-ие Лапласа дискретн. ф-ции времени явл-ся периодической ф-ей с частотой повторения $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (2.5)

$$x^*(s+j\nu\omega_0) = x^*(s),\ \nu \in \mathbb{Z}$$ мн-во целых чисел

$$s = (\sigma + j\omega) \to 2.6$$

$$x^*(\sigma + j(\omega+\omega_0\nu)) = x^*(\sigma + j\omega) \qquad \nu \in \mathbb{Z}$$

(2.7)